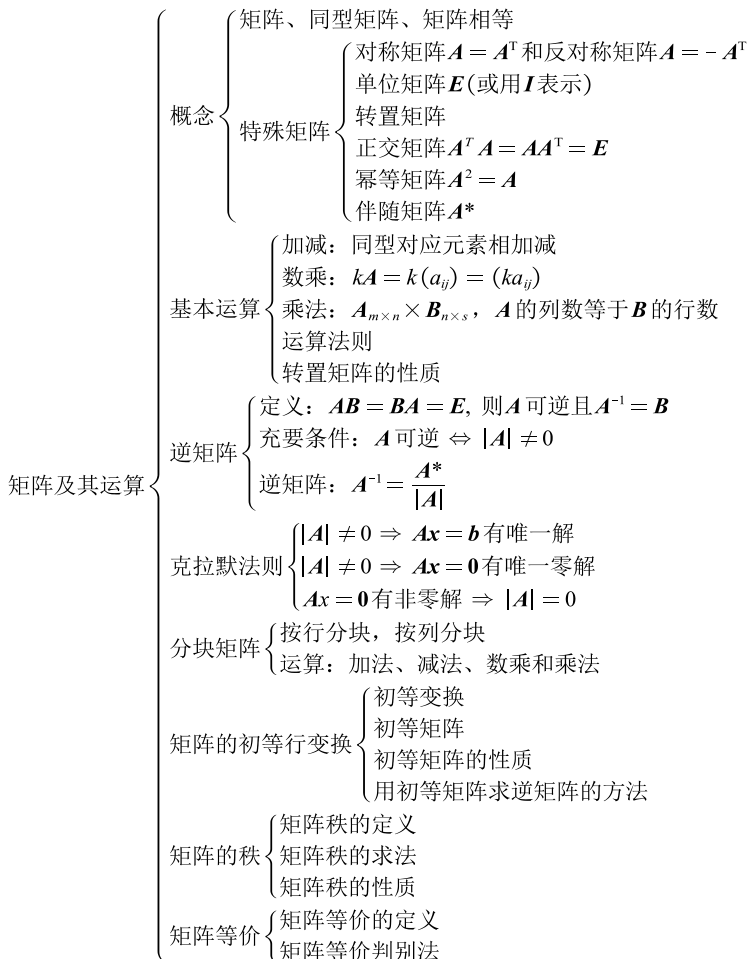


知识点 4~9

【总 览】

知识点 4~9 是围绕矩阵及其运算展开的。其中, 知识点 4 介绍矩阵的概念和一些基本运算法则, 这是后续学习的基础; 知识点 5 介绍可逆矩阵的相关知识, 重点是可逆矩阵的定义, 结合知识点 8 可学习可逆矩阵的计算; 知识点 6 介绍克拉默法则, 该知识点是一个穿插的知识点, 部分教材将该内容放在了行列式, 但是由于要理解该知识点需要可逆矩阵的知识, 因此本书将其调整到该位置; 知识点 7 介绍分块矩阵, 这是考试的难点所在, 需要掌握分块矩阵的一些性质, 以用于简化计算; 知识点 8 介绍初等矩阵, 这是考试的重点, 需要深入理解初等变换和初等矩阵的知识; 知识点 9 介绍矩阵的秩和矩阵的等价, 其中关于矩阵秩的性质需要熟练掌握, 因为考试中有很多证明题涉及矩阵秩的性质的应用。

本部分 6 个知识点的框架如下:



知识点 4 矩阵的概念和基本运算

1. 矩阵

由 $m \times n$ 个元素组成的 m 行 n 列的数表
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
 称为一个 $m \times n$ 阶矩阵, 记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 当 $m = n$

时, 称矩阵 A 为 n 阶方阵 (或 n 阶矩阵).

当矩阵 A 中所有的元素都为零时, 称 A 为零矩阵, 记为 $A = O$ (一般用粗体表示零矩阵).

注: 有些教材中也用小括号表示矩阵, 如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 即 2×2 阶矩阵.

2. 同型矩阵及矩阵相等

当矩阵 A, B 的行数和列数都相同时, 称矩阵 A, B 为同型矩阵.

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 当 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 时, 称矩阵 A, B 相等,

记为 $A = B$.

3. 特殊矩阵

(1) 转置矩阵 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 称 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 为矩阵 A 的转置矩阵, 记为 A^T .

(2) 单位矩阵 称 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 为单位矩阵 (部分教材中用 I 表示单位矩阵, 且单位矩阵一定为方阵).

阵).

(3) 对称矩阵与反对称矩阵 若 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^T = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 即 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 为反对称矩阵 (反对称矩阵主对角线元素为 0).

(4) 正交矩阵 若 A 为 n 阶方阵, 且满足 $AA^T = A^T A = E$, 则称矩阵 A 为正交矩阵.

(5) 幂等矩阵 若 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^2 = A$, 则称矩阵 A 为幂等矩阵.

(6) 伴随矩阵 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为 n 阶矩阵, A_{ij} 为 A 的代数余子式, 记 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$,

称 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

陷阱: ① 对矩阵而言, 用常数 k 乘以该矩阵等于该矩阵中每一个元素都乘以 k , 这点一定要和行列式区分开. ② 注意伴随矩阵的行下标和列下标是转置后的, 因此记忆时可记为: 将 A^T 中 a_{ij} 换为 A_{ij} 就是 A 的伴随矩阵.

4. 基本运算

(1) 矩阵的加减法.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{则 } A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

显然, 只有两个矩阵同型时才能相加减.

(2) 矩阵的乘法.

① 数与矩阵的乘法.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{则 } kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

② 矩阵与矩阵的乘法.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, \quad \text{则 } AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}. \quad \text{其中, } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} +$$

$$a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, s).$$

显然, 两个矩阵的乘法必须满足左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相等.

若 A, B 均为 n 阶方阵, 且满足 $AB=BA$, 则称 A 和 B 可交换, 显然单位矩阵可和任意同阶方阵交换.

陷阱: ① 由 $A \neq O, B \neq O$ 不能推出 $AB \neq O$, 例如: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq O$, 但 $AB=O$. ② 矩阵乘法不满足交换律, 即 AB 和 BA 一般不相等. ③ 由 $AB=AC$ 且 $A \neq O$ 不能得出 $B=C$ 的结论, 例如: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ④ 由 $A \neq O$ 不能得出 $|A| \neq 0$ 的结论. ⑤ 由 $A \neq B$ 不能得出 $|A| \neq |B|$.

(3) 矩阵的运算法则.

$$A+B=B+A, \quad (A+B)+C=A+(B+C), \quad (AB)C=A(BC),$$

$$(k+l)A=kA+lA, \quad k(A+B)=kA+kB, \quad A(B+C)=AB+AC.$$

可以发现, 矩阵没有除法的运算, 因此称矩阵的运算法则为三则运算法则.

(4) 转置矩阵的性质.

$$(A^T)^T = A, \quad (kA)^T = kA^T, \quad (A \pm B)^T = A^T \pm B^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (A^T)^* = (A^*)^T.$$

注: $(ABC)^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T$, 一直可递推到 n 个矩阵相乘, 即 $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \cdots A_1^T$.

(5) 方阵的多项式.

设 A 为 n 阶方阵, 我们定义 $A^0 = E$, $A^m = \overbrace{AA \cdots A}^{m \text{ 个 } A}$, 所以 $A^k A^l = A^{k+l}$, $(A^k)^l = A^{kl}$.

设 x 的 m 次多项式 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则 n 阶方阵 A 的 m 次多项式定义为:

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E \quad (a_m \neq 0). \quad (\text{注意: } a_0 E \text{ 的 } E \text{ 千万别漏掉})$$

(6) 方阵的行列式.

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式称为方阵 A 的行列式, 记为 $|A|$ 或 $\det(A)$, 有以下 3 个性质需要掌握:

$$\textcircled{1} \quad |A| = |A^T|.$$

$$\textcircled{2} \quad |kA| = k^n |A|.$$

$$\textcircled{3} \quad |A_{n \times n} B_{n \times n}| = |A| |B|.$$

例 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^T A =$ _____.

解 $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

知识点 5 矩阵的逆

设 A 是 n 阶矩阵, 若存在 n 阶矩阵 B , 使 $AB=E$ (或 $BA=E$), 则称矩阵 A 为可逆矩阵, 且矩阵 B 称为矩阵 A 的逆矩阵, 记为 $B=A^{-1}$. (定理: 矩阵若存在逆矩阵, 则其逆矩阵是唯一的)

例 1 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 4E = O$, 证明 $A - 3E$ 可逆, 并求 $(A - 3E)^{-1}$.

解 求抽象矩阵的逆矩阵的关键是利用配方法配出所需的项. 由 $A^2 - 2A - 4E = O$ 可得

$$A(A - 3E) + 3A - 2A - 4E = O, \text{ 即 } A(A - 3E) + A - 3E = E, \text{ 所以 } (A - 3E)(A + E) = E.$$

根据逆矩阵的定义可知, $A - 3E$ 可逆, 于是 $(A - 3E)^{-1} = A + E$.

定理 若 n 阶矩阵 A 可逆, 则 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

显然, 由该定理可知 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$ ($\frac{A^*}{|A|}$ 的分母不能为 0). 称行列式不为 0 的矩阵为**非奇异**

矩阵, 因此, 矩阵非奇异等价于矩阵可逆.

技巧

(1) 多个可逆矩阵相乘满足的性质: 若 A, B, C 都为可逆矩阵, 则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

(2) 高阶矩阵求逆矩阵时, 一般不使用公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 在计算可逆矩阵的伴随矩阵时, 一般使用公式 $A^* = |A|A^{-1}$ 和 $AA^* = A^*A = |A|E$, 且这里的 A 可以换成任意方阵.

例如, 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则 $A^*(A^*)^* = |A^*|E$, 再利用 $A^* = |A|A^{-1}$ 可得 $A^{-1}|A|(A^*)^* = |A^{-1}|A||E \Rightarrow A^{-1}|A|(A^*)^* = \frac{|A|^n}{|A|}E$, 因此 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

例 2 设 A 为 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 = E, A \neq E$, 证明 $|A + E| = 0$.

证明 $A^2 = E \Rightarrow A^2 - E = O \Rightarrow (A + E)(A - E) = O$, 若 $|A + E| \neq 0$, 则 $(A + E)^{-1}$ 存在. $(A + E)(A - E) = O$ 两边左乘 $(A + E)^{-1}$ 可得 $A - E = O \Rightarrow A = E$, 与条件 $A \neq E$ 矛盾, 所以 $|A + E| = 0$.

知识点 6 克拉默法则

$$\text{对于方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{以及} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (2)$$

方程组 (2) 称为**非齐次线性方程组**, 方程组 (1) 称为方程组 (2) 对应的**齐次线性方程组**或**导出方程组**.

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}, \text{其中 } D \text{ 称为系数行列式,}$$

则有以下结论成立:

(1) 齐次线性方程组 (1) 只有零解的充要条件是 $D \neq 0$.

(2) 齐次线性方程组 (1) 有非零解 (或者有无穷多个解) 的充要条件是 $D = 0$.

(3) 非齐次线性方程组 (2) 有唯一解的充要条件是 $D \neq 0$, 此时 $x_i = \frac{D_i}{D} (i=1, 2, \dots, n)$.

(4) 当 $D=0$ 时, 非齐次线性方程组 (2) 要么无解, 要么有无穷多个解.

技巧

(1) 只有当方程组中方程的个数与未知数的个数相等时才可以使用克拉默法则.

(2) 齐次线性方程组有非零解与有无穷个解等价, 齐次线性方程组有非零解的根本原因是存在自由的未知变量. (知识点 16 和 17 有更详细的讨论)

(3) 当 $D \neq 0$ 时, 非齐次线性方程组有唯一解, 可以使用克拉默法则求解; 当 $D=0$ 时, 不能使用克拉默法则求解, 具体的求解步骤参见知识点 16 和 17.

知识点 7 分块矩阵

1. 矩阵的分块

用几条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块, 每一小块称为原矩阵的子矩阵, 把子矩阵看作原矩阵的一个元素, 就得到了分块矩阵. 例如,

$$(1) A \text{ 以行分块: } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \text{ 其中 } A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] \text{ 是 } A \text{ 的一个子矩阵.}$$

$$(2) B \text{ 以列行分块: } B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [B_1, B_2, \cdots, B_n], \text{ 其中 } B_i = [b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}]^T \text{ 是}$$

B 的一个子矩阵.

2. 分块矩阵的基本运算 (以 2×2 型分块矩阵为例)

$$(1) \text{ 加法: } \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 数乘: } k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}.$$

$$(3) \text{ 乘法: } \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ BX + DZ & BY + DW \end{bmatrix}.$$

$$(4) \text{ 若 } A, B \text{ 分别为 } m, n \text{ 阶方阵, 则 } \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}.$$

$$(5) \text{ 逆矩阵: } \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

$$(6) \text{ 转置: } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}.$$

例 1 设 A, B, C 为 n 阶可逆矩阵, O 为 n 阶零矩阵, 求 $\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}^{-1}$.

解 设其逆矩阵为 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 那么 $\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$, 可得 $AX_1 = E, AX_2 = O$,

$$BX_1 + CX_3 = O, BX_2 + CX_4 = E, \text{ 解得 } \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

知识点 8 初等矩阵

1. 初等变换

(1) 一个非零常数乘以矩阵的某一行(列).

(2) 互换矩阵中两行(列)的位置.

(3) 将某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

以上 3 种变换称为矩阵的 3 种**初等行(列)变换**, 且分别称为倍乘、互换、倍加初等行(列)变换.

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 通过初等行变换(或称为行初等变换), 可以将 A 化为行阶梯型矩阵; 进一步地, 再对行阶梯型矩阵进行初等行变换, 可将其化为行标准型矩阵.

注: 如果从第 1 行起, 每行第 1 个非零元素前面零的个数逐行增加, 且一旦出现全为 0 的行, 则后面各行(若还存在的话)都是零行, 这样的矩阵称为**行阶梯型矩阵**. 如果行阶梯型矩阵中非零行的第 1 个非零元素为 1, 且与其在同一列的其他元素都为 0, 则称为**行标准型矩阵**.

例如, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是行阶梯型矩阵, 而 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是行标准型矩阵.

2. 初等矩阵

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**, 以三阶矩阵为例, 分别是:

$$(1) E_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E \text{ 的第 2 行(或第 2 列)乘以 } k, \text{ 称为倍乘初等矩阵.}$$

$$(2) E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E \text{ 的第 1, 2 行(或第 1, 2 列)互换, 称为互换初等矩阵.}$$

$$(3) E_{13}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, E \text{ 的第 1 行的 } k \text{ 倍加到第 3 行(或第 3 列的 } k \text{ 倍加到第 1 列), 称为倍加初等}$$

矩阵.

注: 不同教材的记法不同, 在学习时以所学教材的记法为主.

3. 初等矩阵的性质

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 因 $|E_i(k)| = k \neq 0$, $|E_{ij}| = -1 \neq 0$, $|E_{ij}(k)| = 1 \neq 0$, 故初等矩阵都是可逆矩阵, 且 $[E_i(k)]^{-1} =$

$E_i\left(\frac{1}{k}\right)$, $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $[E_{ij}(k)]^{-1} = E_{ij}(-k)$, 其逆矩阵仍是初等矩阵.

(3) 若 A 是可逆矩阵, 则 A 可以表示成一系列初等矩阵的乘积, 即 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$, 其中 P_1, P_2, \dots, P_l 都是初等矩阵.

(4) 对 n 阶矩阵 A 进行初等行变换, 相当于将矩阵 A 左乘相应的初等矩阵; 同理, 对 n 阶矩阵 B 进行初等列变换, 相当于将矩阵 B 右乘相应的初等矩阵.

技巧

(1) 初等变换不改变矩阵的秩.

(2) 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A , 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q , 使 $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中

$r(A) = r$, E_r 为 r 阶单位矩阵, 形如 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 的矩阵称为标准型矩阵.

例 1 下列说法中错误的是 ().

- A. 初等矩阵是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍是初等矩阵
B. 初等矩阵的行列式不为 0
C. 初等矩阵的转置仍是初等矩阵
D. 初等矩阵的乘积仍是初等矩阵

解 选 D. 初等矩阵的乘积是可逆矩阵, 但不一定是初等矩阵. 例如, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的乘积为 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

该矩阵不能由单位矩阵通过一次初等变换得到, 所以不是初等矩阵.

4. 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[A|E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E|A^{-1}] \text{ 或者 } \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 2 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $[A|E] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \end{array} \right] = [E|A^{-1}], \text{ 所以}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

知识点 9 矩阵的秩和矩阵等价

1. 矩阵秩的概念

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 从矩阵 A 中任取 r 行和 r 列, 交叉点上的元素按照原有次序排列构成的 r 阶行列式称为矩阵 A 的 r 阶子式, 矩阵 A 共有 $C_m^r C_n^r$ 个 r 阶子式. 若 A 至少有一个 r 阶子式不为零, 但所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 皆为零, 称 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $r(A) = r$.

注: 部分教材用 R 表示秩, 即 $R(A) = r$. 此外由于子式是行列式, 因此是一个常数, 秩也是一个常数.

技巧

- (1) 根据矩阵秩的定义, 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A) \leq \min\{m, n\}$.
- (2) 设 A 是 n 阶矩阵, 若 $|A| \neq 0$, 即矩阵 A 为非奇异矩阵, 由矩阵秩的定义得 $r(A) = n$.
- (3) $r(A) = 0$ 的充要条件是 $A = O$.
- (4) A 为非零矩阵的充要条件是 $r(A) \geq 1$.

2. 矩阵秩的求法

对矩阵进行初等行变换并阶梯化后, 非零行数记为矩阵的秩. 例如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即 $r(A) = 2$.

技巧

- (1) $r(A) \geq 2$ 的充要条件是 A 至少有两行不成比例.
- (2) 由于初等变换不改变矩阵的秩, 所以求矩阵的秩时, 可以对矩阵进行初等行变换, 将矩阵化为行阶梯型矩阵, 则非零的行数即该矩阵的秩.

3. 矩阵秩的性质

性质 1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A) = r(A^T) = r(AA^T)$. (证明见知识点 18)

性质 2 设 A, B 是同型矩阵, 则 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$.

性质 3 设 A, B 分别为 $m \times n$ 及 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

性质 4 设 A, B 分别为 $m \times n$ 及 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$. 特别地, 如果 $AB = O$, 那么 $r(A) + r(B) \leq n$.

性质 5 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, P, Q 分别为 m 及 n 阶可逆矩阵, 则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$.

性质 6 设 A 是 n 阶矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1 (n \geq 2), \\ 0, & r(A) < n-1 (n \geq 2). \end{cases}$

性质 7 (1) $r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq r(A) + r(B)$. (2) $r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$.

例 1 若五阶方阵 A 的秩为 3, 则 $r(A^*) =$ _____.

解 利用性质 6 可以很快得到结论, 答案为 0. 下面证明性质 6.

由于 $AA^* = |A|E$,

(1) 若 $r(A) = n$, 即 $|A| \neq 0$, 对 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式得 $|A||A^*| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \Rightarrow |A^*| \neq 0$,

所以 $r(A^*) = n$.

(2) 若 $r(A) = n-1$, 则有 $|A| = 0$, 即 $AA^* = O$, 故有 $r(A) + r(A^*) \leq n \Rightarrow r(A^*) \leq n - (n-1) = 1$. 又

由于 A^* 的元素均为 A 的 $n-1$ 阶子式, 而 $r(A) = n-1$ 说明至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0, 所以 $r(A^*) \geq 1$, 即

$r(A^*) = 1$.

(3) 若 $r(A) < n-1$, 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式全为 0, A^* 中的元素均为 0 $\Rightarrow A^* = O$, 即 $r(A^*) = 0$.

4. 矩阵等价的定义

设 A, B 是两个同型矩阵, 若 A 经过有限次初等变换化为 B , 称矩阵 A 与矩阵 B 等价.

5. 矩阵等价判别法

定理 1 设 A, B 为同型矩阵, 则 A, B 是等价矩阵的充要条件是 $r(A) = r(B)$.

定理 2 设 A, B 为同型矩阵, 则 A, B 等价的充要条件是存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$.

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, 则 A 的等价标准型为_____.

解 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 A 的等价标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

【重要题型】

题型 1 矩阵的运算与矩阵行列式的计算

对于计算矩阵的题目, 首先要考虑的是对式子进行化简, 将要求的矩阵单独放在一边. 另外, 矩阵行列式的

常用公式总结如下:

$$|AB| = |A||B|, |kA_{n \times n}| = k^n |A|, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, |A^*| = |A|^{n-1}.$$

例 1 设 $A = [A_1, A_2, A_3]$ 为三阶矩阵, $|A| = 1$, A_i 是 A 的第 i 个列向量, 计算 $|A_1 - 2A_2, 2A_2 - 3A_3, 4A_1|$.

解 $|A| = 1 \Rightarrow |A_1, A_2, A_3| = 1 \Rightarrow |A_3, A_2, A_1| = -1 \Rightarrow |A_2, A_3, A_1| = 1$, 则 $|A_1 - 2A_2, 2A_2 - 3A_3, 4A_1| = |-2A_2, -3A_3, 4A_1| = 24|A_2, A_3, A_1| = 24$.

例 2 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^*B^{-1}|$ _____.

解 $A^*A = |A|E, |A||A^*| = 2^n, |A^*| = 2^{n-1}, BB^{-1} = E, |B^{-1}| = -\frac{1}{3}$, 所以, $|2A^*B^{-1}| = 2^n |A^*| |B^{-1}| = -\frac{2^{2n-1}}{3}$.

例 3 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X 使 $A^*XA + B^{-1}XA = 4E$.

解 由 $|A| = 1$ 可得矩阵 A 可逆. 在 $A^*XA + B^{-1}XA = 4E$ 两边同时左乘矩阵 A , 同时右乘矩阵 A^{-1} , 化简可得

$$|A|X + AB^{-1}X = 4E, \text{ 即 } (|A|E + AB^{-1})X = 4E, \text{ 其中 } |A| = 1, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 由此可得 } |A|E + AB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 其行列式为 } 8, \text{ 即 } |A|E + AB^{-1} \text{ 可逆. 利用初等行变换可得 } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\text{因此, } X = 4(|A|E + AB^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

题型 2 初等变换与初等矩阵

初等变换和初等矩阵题目的考察重点在于对三类初等变换的理解, 以及左乘初等矩阵和右乘初等矩阵分别改变原矩阵的行和列. 另外, 一定要牢记, 初等变换不改变矩阵的秩.

例 4 设 A 是三阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得矩阵 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得矩阵 C , 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为 _____.

解 由初等矩阵的性质可知 $A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$, 则:

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 5 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, P 为初等矩阵, 若 $PA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} & 2a_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 则 $AP =$ _____.

解 $PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 2a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

例 6 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}$ 经过初等变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $a =$ _____.

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ a & 0 & -a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第3列加到第1列}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第1列减去第2列的3倍}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$, 所以 $r(A) = 2$.

因为初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $r(B) = 2$, 则 $|B| = 2 - a = 0$, 所以 $a = 2$.

题型 3 求抽象矩阵的逆矩阵

所谓抽象矩阵, 是指题目中没有告知矩阵具体的数值. 求抽象矩阵的逆矩阵往往需要用到逆矩阵的最原始定义: 若 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则称 B 为 A 的逆矩阵. 因此, 在具体题目中, 如果要求抽象矩阵 P 的逆矩阵, 则要将题目所给的式子变形为 $PH = E$ 或者 $HP = E$, 这样 H 即 P 的逆矩阵.

例 7 已知方阵 A 满足 $A^2 - A + E = 0$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____.

解 $A^2 - A + E = 0 \Rightarrow (A + 2E)A - 3A + E = 0 \Rightarrow (A + 2E)A - 3(A + 2E) + 7E = 0$, 所以 $(A + 2E)(A - 3E) = -7E$, 即 $(A + 2E) \left(\frac{3E - A}{7} \right) = E$, 可得 $(A + 2E)^{-1} = \frac{3E - A}{7}$.

例 8 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$, 求 A^{-1} , $(A + 2E)^{-1}$.

解 方法 1: $A^2 - A - 2E = 0 \Rightarrow A(A - E) = 2E \Rightarrow A \frac{A - E}{2} = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{A - E}{2}$.

$A^2 - A - 2E = 0 \Rightarrow A(A + 2E) - 3A = 2E \Rightarrow A(A + 2E) - 3(A + 2E) = -4E$, 所以

$(A - 3E)(A + 2E) = -4E \Rightarrow \frac{3E - A}{4}(A + 2E) = E \Rightarrow (A + 2E)^{-1} = \frac{3E - A}{4}$.

方法 2: $A^2 - A - 2E = 0 \Rightarrow A + 2E = A^2 \Rightarrow (A + 2E)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$. 因为 $A^{-1} = \frac{A - E}{2}$, 所以

$(A + 2E)^{-1} = \frac{A - E}{2} \frac{A - E}{2} = \frac{A^2 - 2A + E}{4}$.

题型 4 伴随矩阵的计算

假设 A 是 n 阶可逆矩阵, 则伴随矩阵的计算中需要掌握以下公式:

$$AA^* = A^*A = |A|E, \quad |A^*| = |A|^{n-1}, \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad (A^T)^* = (A^*)^T, \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A,$$

$$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}, \quad (AB)^* = B^*A^* \text{ [注意 } (A+B)^* \neq A^* + B^* \text{]}.$$

例 9 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为 A^* , 则 $(A^*)^{-1} =$ _____.

解 $|A| = 6, (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

例 10 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 证明: $(AB)^* = B^*A^*, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$

证明 $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*.$

$(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$, 又因为 $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}$, 所以 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$

题型 5 矩阵等价

考试中常考矩阵等价的充要条件——两个矩阵同型且秩相等, 这两个条件缺一不可, 在计算矩阵的秩时直接采用初等变换.

例 11 设 $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T$, 且 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, A = ab^T, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 证明:

A 与 B 等价.

证明 A, B 初等变换分别化为:

$$A = ab^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即 A, B 的秩相等且 A, B 同型, 因此 A, B 等价.

例 12 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 下列结论中正确的是().

A. 若 $|A| = a \Rightarrow |B| = a$

B. $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0, |B| = 0$

C. 若 $|A| = a \Rightarrow |B| = -a$

D. $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0, |B| \neq 0$ 或 $|A| \neq 0, |B| = 0$

解 因为 A 与 B 等价, 所以二者的秩相等. 由 $|AB| = 0$ 可得 $|A||B| = 0$, 因此 $|A| = 0$ 或者 $|B| = 0$.

由于二者的秩相等, 若其中一个行列式为零, 另一个也一定为零, 所以选择 B.

例 13 判断题: 若矩阵 A, B 满足 $r(A) = r(B)$, 则 A 与 B 等价. ()

解 错误, 只有两个同型矩阵的秩相等时, 这两个同型矩阵才等价, 因此一定要强调这两个矩阵同型.

题型 6 矩阵的秩

考试中常考矩阵的秩的七大性质, 因此需要牢记这七大性质. 一般而言, 要证明矩阵 A 的秩为 r , 可利用矩阵的秩的不等式分别证明 $r(A) \geq r$ 和 $r(A) \leq r$.

例 14 设 A 和 B 是 $m \times n$ 矩阵, 则 () 成立.

A. $r(A+B) \leq r(A)$

B. $r(A+B) \leq r(B)$

C. $r(A+B) < r(A) + r(B)$

D. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

解 根据性质 2: 设 A, B 是同型矩阵, 则 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$, 所以 D 选项正确.

例 15 设 A 为 n 阶矩阵, $A^2 = 2A$, 证明: $r(A) + r(A - 2E) = n$.

证明 由 $A^2 = 2A \Rightarrow A(A - 2E) = O$, 则根据不等式 $r[A(A - 2E)] \geq r(A) + r(A - 2E) - n$ 可得 $n \geq r(A) + r(A - 2E)$. 又因为 $r(A) + r(A - 2E) \geq r[A - (A - 2E)] = r(2E) = n$. 所以 $r(A) + r(A - 2E) = n$.

【精选习题】

基础篇

1. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则下列命题中正确的是 ().

A. 若 A 或 B 可逆, 则 AB 可逆

B. 若 A 与 B 可逆, 则 $A+B$ 可逆

C. 若 A 或 B 不可逆, 则 AB 不可逆

D. 若 A 或 B 不可逆, 则 $A+B$ 不可逆

2. 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换后得到矩阵 B , 则 ().

A. $|A| = |B|$

B. $B=C$

C. $|A| \cdot |B| > 0$

D. 若 $|A| = 0$, 则 $|B| = 0$

3. 设 A 为三阶方阵, $|A| = 2$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|A^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|2A^2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为四维列向量, 已知四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, 又 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$,

则四阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 A 为三阶方阵, 将第 1 行的 4 倍加到第 3 行得到 B , 再将 B 的第 1 列和第 2 列对调得到 C , 若 $PAQ=C$, 且 P, Q 为初等矩阵, 则 $P = \underline{\hspace{2cm}}$, $Q = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 A 为六阶矩阵, $|A| = 0$, $A^* \neq O$, 则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$.

8. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $ABA^* = 8BA^{-1} + 12E$, 求 B .

9. 设 $A, B, A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵, 证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也是可逆矩阵.

10. 同阶方阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$.

(1) 证明: $(B-E)^{-1} = A-E$.

(2) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A .

提高篇

11. 设 A, B 均为二阶可逆矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 证明 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

$$\begin{bmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{bmatrix}.$$

12. 设 A, B, C 是 3 个 n 阶方阵, $|A|=1$, $|C-BA^{-1}B|=2$, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 则 k 分别取何值时使 A 的秩为 1, 2, 3?

14. 设 A, C, D 都是 n 阶实方阵.

(1) 若 $AA^T = O$, 证明 $A=O$.

(2) 若 $CAA^T = DAA^T$, 证明 $CA=DA$.

15. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 A 的每一行元素之和都等于常数 a , 证明 A^m (m 为正整数) 的每一行元素之和为 a^m .